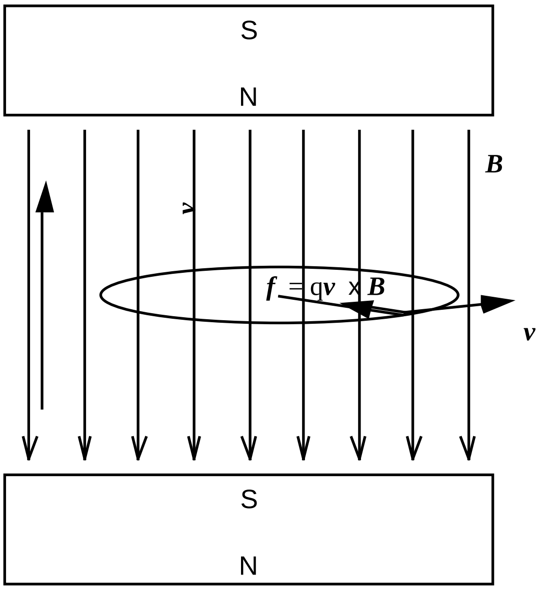
磁場とは何か？

平成 12 年 10 月 6 日金曜日

○磁場の定義としてのローレンツ:Lorentz 力

電気を帯びた物質に対する力（電気力）はクーロンの法則で表された。数式で書くと $\boldsymbol{f} = q\,\boldsymbol{E}$ である。しかしながら、帯電した物質（荷電粒子）に働く力は力はこれだけでは表せない。



一般的に、荷電粒子を磁石の間を通すと曲がってしまう。ここに働く力は、その速さ（$\boldsymbol{v}$）と磁石の強さ（$\boldsymbol{B}$）に比例し、その運動の方向と垂直に働く。また、この力は、粒子が磁石の方向に運動すると働かない。一般的に、その運動は、磁石に水平な成分と垂直な成分とに分離すると、その足し合わせで表される。

この力を数式で表すと、

$$\boxed{\boldsymbol{f} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \qquad \text{Lorentz force}}$$

と表すことが出来る。ここでは、この表式を逆に磁場の定義と考える。すなわち、この様に粒子の速度に依存し、進行方向と直交する方向にかかる力を磁場と定義しよう。

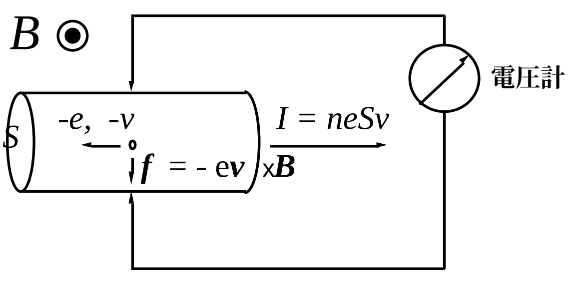
まずは、磁場と半径の関係をひとまず非相対論的に解いてみよう。粒子の速度は磁場に垂直で、磁場に垂直な平面内で半径 $\boldsymbol{R}$ 角速度ωの等速円運動（$v=R\omega$）をするとしよう。図中上向きを z 軸と取ると、磁場としては$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -B \end{pmatrix}$であり、粒子の位置は$\boldsymbol{x} = R\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$で表される。

従って、速度及び加速度は $\boldsymbol{x}$ の時間微分から、

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v} = R\omega\begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{及び} \quad \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -R\omega^2\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{v^2}{R}\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。これと、運動方程式$\boldsymbol{f} = m\dfrac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = -vB\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$から、回転半径は$R = \dfrac{mv}{qB}$。

○ホール:Hall 電圧



現実問題として、我々が磁場を測定するときに、どのようにしているのかを具体的に見ておこう。

電流は、電子の（電流とは逆方向の）流れであると考えることが出来ることは、以前示した。それでは、磁場中での電流はどうなっているだろうか？

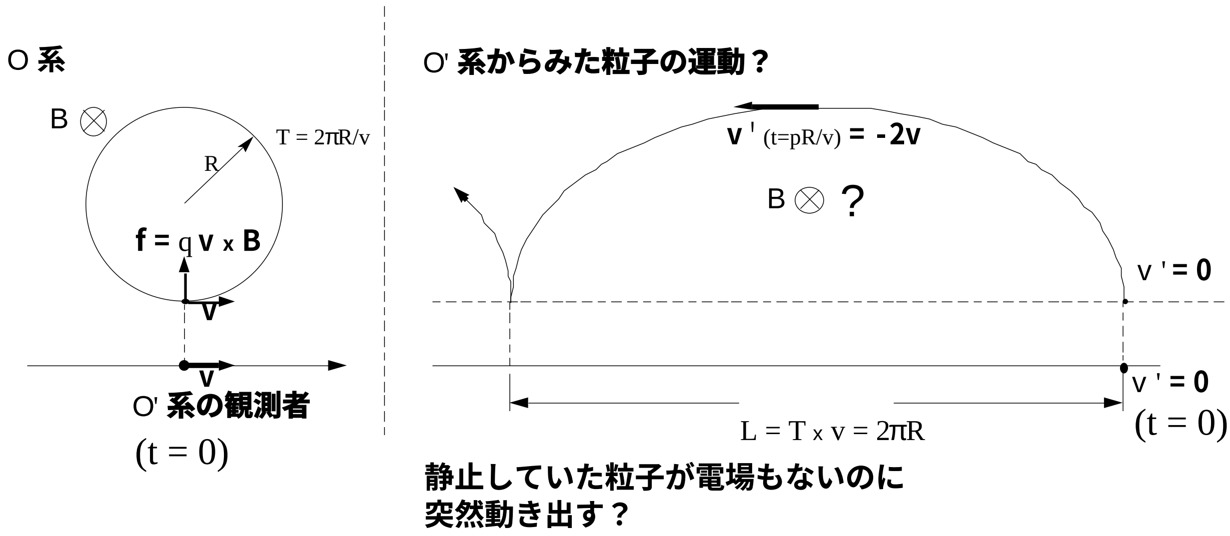
単位体積あたりの伝導電子の個数を n と書くと、電流は $I = neSv_{drift}$ で表される。ここで、$-e$ は電子の電荷、S は導体の断面積、$-v_{drif}$ は電子の全体としての移動速度である。個々の電子はその速度に従って磁場によって運動と垂直な方向に力を受けるので、図のように導体の上下で電圧を測定すると、有限の電圧が発生する。これをホール電圧と言い、$\boldsymbol{f} = -e\boldsymbol{E}_{Hall} = -e\boldsymbol{v}_{drift} \times \boldsymbol{B}$ で表される。

磁場は、この様な方法で測定されることが一般的である。電圧計をつなげる位置を変えることによって、磁場の方向も測定できる。

ここで、磁場中を電子が流れると、導体中を流れる電子はあたかも電場が存在したかのように振る舞っていることに、注意しよう。そうでなければ、電圧計がふれることはあり得ない。このことについて、もう少し詳しく考えてみよう。

○磁場の問題点

ここでは、磁場を荷電粒子の運動に対し Lorentz 力で表されるような力を与える物と考えた。しかしながら、これは極めて不思議な形をしている。何が不思議かというと、力がそれが作用する物質の速度（すなわち、それを観測している系）に依存すると言うことである。何故それが奇妙かをもう少しはっきりさせるため、簡単な例を考えてみる。先ほどの、一様磁場中での、荷電粒子をそれと同じ速度で動く観測者（O'系）から見てみよう。簡単のため、磁場は非常に大きな領域で一様であるとする。



静止している観測者（O 系）からは、粒子の運動は単なる円運動なので（周期 T=2πR/v）O'系の観測者が見る荷電粒子の軌跡は、円運動を引き延ばしたような形が観測されるはずだ（図参照）。ところで、時刻 0 で水平方向に同じ点から動くとすると、その時 O'系の観測者が見る粒子の速度は、0 である。今は、磁場しか考えていないのに、 O'系の観測者が見る速度 0 にも係わらず、荷電粒子は動き出してしまう！こんな事は、あり得ない。

何が、おかしかったのだろうか？ O'系の観測者が見る荷電粒子の軌跡は、 O 系から見て円運動ならば、単に空間の点を等速移動させただけなので正しいとしか考えようがない。こ

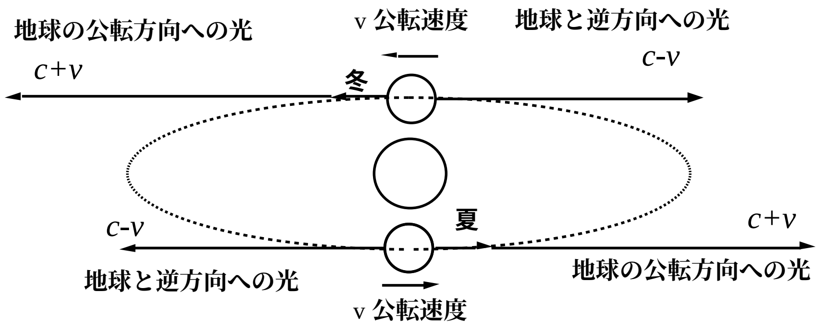
こで、磁場は座標変換で不変であると暗黙の内に仮定したが、これが間違っているのだろうか？別の言葉で言えば、磁場が等速移動することによって、違う物(すなわち電場)に変化してしまうと考えられるのだろうか？

この事は、相対性原理（少なくとも特殊相対論）の手助けを借りなければ、正しく理解できない。

特殊相対論入門

○不変速度（光速）の発見

速度はある観測（慣性）系から相対的な移動の速さとして決められる量である。従って、どの慣性座標系から見ても変わらない絶対速度などという物は存在しない[*]と考えられてきた。特に、「光は波としての性質を持つ」と言うことが知られてきたので、それを伝えるための媒質（エーテル:ether と呼ばれた）が存在すると考えられた。もし、これらが事実とすると、光はそれを観測する系の速度が異なっていれば､光の速度も変化する量でなければならない（図参照）。もちろん、これは実際に実験で決定すべきことだ[**]。

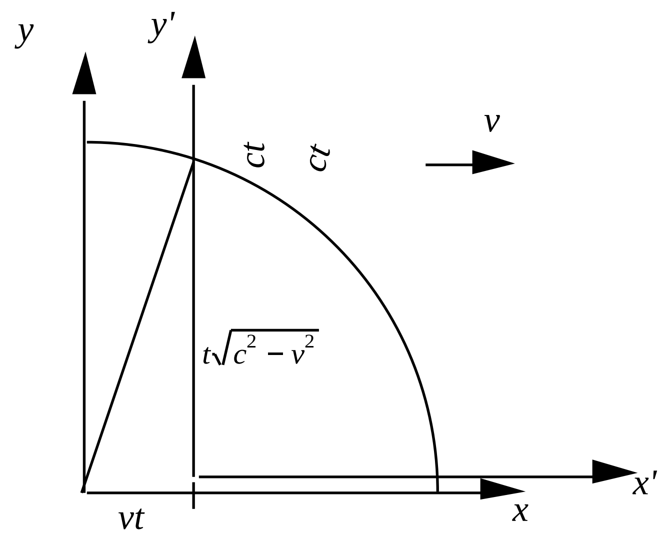


そこで、夏と冬とで図で示されたように、光の速度に偏りがあるかどうか、実際にそれを観測する実験が行われた。しかしながら、ここではいっさい期待されたような速度の変化は観測されなかった。現在も重力波観測実験と絡んで、精密な実験が繰り返されているが、いっさい光の速度が慣性系の速度によって変化するという事実は観測されていない。

従って、光速は、それを観測する系の速さを変えても変わらない不変量（不変速度）でなければならない。すなわち、我々は、一般常識の通用しない世界に住んでいることになる。それでは、この事実をどう考えたらいいのだろう？

注 1）物理学者も、初めは当然、常識から出発する。初めから、相対論のような（一見）奇妙なことを考えたわけではない。

注 2）実験物理学者は、なんでも疑ってかかる。



○観測する系での尺度の変化

一般的取り扱いの前に、非常に簡単な場合を考えてみよう。ある観測系（O系）と、それと相対的に速度vでx軸方向に動いている慣性座標系（O'系）を考えよう。ここで慣性座標系とは、その速度が変化しないような（加速度を持たない）座標系のことである（図参照）。図のように書くのは、必ずしも正しくないことは後で示すが、今は気にしないことにする。

今、時間0でO系とO'系の原点は重なっているとし、その時、原点から光が出たと考える。これは、一般的には、ずれていても構わないが、それは座標の平行移動だけなので、気にすることはない。ある時間tだけ後のことを考えると、光は等方的に出るので、図のように拡がるはずである。O'系では、光は$t\sqrt{c^2-v^2}$しか移動していない。もし両方の座標系で、同様に時間が進むとすると（時間の尺度が変わらないとすると）、光速は O'系では$\sqrt{c^2-v^2}$になってしまう。これは、両方の系で、尺度が変わらないと仮定したから得られた結論なので、その仮定は間違っている。すなわち、O'系では時間は$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$倍だけ食い違っていると考えるのが、妥当ではないだろうか？

そこで、両方の系では、一般的にそれを測るための尺度が食い違うかもしれないことを受け入れよう。ただし、ここで得られたO系とO'系の時間の食い違いは正しいが、それは、たまたまy軸（相対移動方向と垂直な方向）への光を考えたから正しく得られた物であることが後の議論から分かる。ちなみに、図のように光の広がりを書くのは正しくないと述べたが、このことは、今までの議論と同様にしてx軸方向への光の速度を計算すると、光速が一定にならないことから分かる。各自確かめて欲しい。

○座標変換（ガリレイ:Galilei 変換）

それでは、どう考えるのが正しいのだろう？まず、絶対に正しいと考えられることを整理してみよう。その上で、時間はどんな系でも変わらないとしたときの慣性系どうしの座標変換規則を調べてみることにする。

ある慣性系 O 系の中では、距離及び時間が測定（定義）できる。これは、我々が普段することであり、これが成り立たないと議論すら始められないので、これは良いと考えよう。

そうだとすると、この系で等速運動をする物質（今、その大きさを考えない点状の物“質点”を考える）の速さも決定できる。移動距離をそれにかかる時間で割れば良いだけである。等速運動は、その移動方向も決めることが出来るので、今それを x 軸にとり、速度 v で移動しているとしよう。これと同様に移動する慣性系 O’系もまた考えることが出来る。この等速運動をする質点は、O’系では静止しているはずである。

数式で書くと、O 系で $x_p(t) = vt$ の時、O’系では $x'_p(t') = 0$（t' は任意）である。ここで、x_p, t はそれぞれ O 系での質点の位置と固有時間、x'_p, t' は O’系でのそれである。添字 p は、物体の位置であることをあらわに示すためにつけた。

これから何が言えるだろうか？我々が欲しいのは、物質の位置ではなく、より一般的な両方の座標系の間の変換規則である。そこで上の二つをまとめて書くと、$x' = 0 = x - vt$ が得られる。これは、相対論とは無関係に一般的に成り立たなければならない規則である。

相対論以前の我々の“常識”を振り返ってみよう。そこでは、この関係から $x' = x - vt$ 及び $t' = t$ を常識が要求したのであった。すなわち、座標変換では、距離間隔も時間間隔も変わらない。この関係を行列で書き表すと、

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad \text{あるいは、} \quad \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

と書くことが出来る。ここで右側の式は、変換行列の要素が次元を持たないように、速度を光速で割って $\beta = v/c$ とした。

これが、ガリレイ変換であり、言ってみれば、「電車に乗っている人の考える座標系と地表にいる人の座標系を、両者の時計は全く変わらないとしたときの変換規則」である。ここに、原点から単位時間後の O 系での x 方向と $-x$ 方向の光の位置 $\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix}$ を代入すると、O’系ではそれぞれ $\begin{pmatrix} c \\ c(1-\beta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ -c(1+\beta) \end{pmatrix}$ になり、確かにこの変換からは、「光はそれを観測する慣性系によって、その速度が変わらなければならない」という“常識”が得られる。

すなわち、静止系から等方的に出た光を、x 軸方向に速度 v で移動する系から観測した場合には、x 軸方向への光は速さ $c(1-\beta) = c - v$ で伝わるように見えるはずだし、反対方向への光は $c(1+\beta) = c + v$ で伝わるように見えるはずだ。

ところが、光の実験は、これを完全に否定してしまった。

○座標変換（ローレンツ Lorentz 変換）

どこで間違い得るだろう？絶対に正しい関係 $x' = 0 = x - vt$ に立ち返ろう。ガリレイ変換では、この式の尺度は変わらないとしたが、これを認めてしまうと決して光速度一定は導けないことは、前節で見たとおりである。そこで、その尺度として、γを導入して $x' = \gamma(x - vt)$ と置こう。ただし、この尺度は速度に依存しうる。時間の関係は良く分からないので、未知数 a,b を導入して $t' = at + bx$ と書くと、この変換は、

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで、表式に以後 c がたくさん出てくるので、$ct \quad t$ と書き換えた。これは c=1 と置いたと考えても良いし、時間を単位時間当たり光が進む距離で測ることにしたと考えても良い。これは、自然単位系と呼ばれる物の一部である。

　こうしても良いことは、次元解析の所で、物理的単位は一般に 4 つ任意に（勝手に）決めて構わないということを見てきた事からも明らかだろう。SI 単位系に戻すのには次元解析から決めればよい。

　ここでの、光の伝わり方を見てみよう。前と同様に光は慣性系の進行方向とその逆方向にそれぞれ、O 系では単位時間後に $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の位置へ進むので（自然単位系であることに注意）、O'系では $\begin{pmatrix} a+b \\ \gamma(1-\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-b \\ -\gamma(1+\beta) \end{pmatrix}$ になる。それぞれは光速度一定でなければならず (ベクトルの上の要素と下の要素の比の絶対値は 1)、その進行方向も変わらないので、$\frac{\gamma(1-\beta)}{a+b} = 1$ 及び $\frac{-\gamma(1+\beta)}{a-b} = -1$ とならなければならない。後の式で、-1 となっているのは x 軸と逆方向に進んでいる光であるからだ。この連立方程式を解くと、$a = \gamma$ 及び $b = -\gamma\beta$ が得られる。従って、変換形式は未知数 γ を除いて、

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

と求まる。尺度 γ だけが未知数として残ってしまった。どうやって求めたら良いだろうか？

　今度は O'系から見た O 系を考えてみよう。上の式からその変換を求めるには、単にその逆変換を考えればよい。すなわち、

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma^2(1-\beta^2)} \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}$$

また、O 系は O'系から見れば、当然今までとは逆方向に同じ速さ $-\beta$ で移動していなければならない。従って、

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}$$

この二つの関係から、$\gamma^2(1-\beta^2) = 1$ すなわち $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ が求まる。これから、<u>γ は必ず1以上</u>であることが分かる。また、この式から β は1を越えられないことも分かる。すなわち、<u>どんな物質も光速を越えられない</u>。

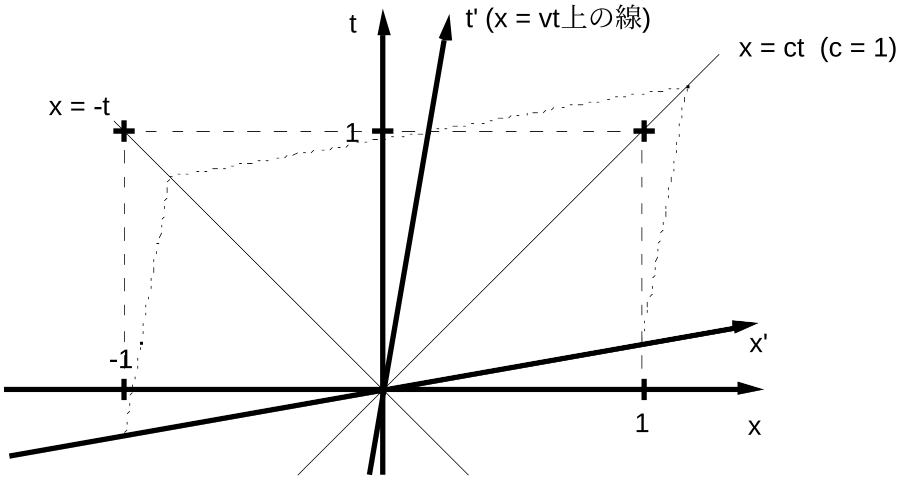
　最後に座標変換に垂直な方向も正しい光速の変換を与えるかどうかを確認しておく。そのためには、Lorentz 変換を拡張しなければならないが、前みた図から得られた結論が正しかったことを考えると、こちらの方向には座標は変化しないと考えられる。すなわち、y'=y, z'=z となると予想できる。行列形式に書くと、x 軸方向へ速度 β で移動する慣性座標系に対する座標変換形式は、

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

で表される。この考えが正しいこと、すなわち、実際に座標変換に垂直な方向の光の速度が不変であることを示そう。それには y 軸方向に出る光の変換を考えればよい。これは、前と同様に、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{の変換} \begin{pmatrix} \gamma \\ -\gamma\beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ -\gamma\beta \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を考えればよい。これらから光速を計算すると $\gamma^2\beta^2 + 1 = \dfrac{\beta^2}{1-\beta^2} + 1 = \dfrac{1}{1-\beta^2} = \gamma^2$ であるから、確かに成り立つ。今は、それぞれ垂直と水平に出た光の場合しか計算しなかったが、任意の角度について成り立つのは明らかだろう。疑問であれば、計算してみて欲しい。



もうすこし、直感的に見てみよう。座標変換の式から、相対運動する座標系の運動方向の軸を平行移動のように図示するのは、間違っていたことは明らかだ。 正しくは、O'系の慣性運動方向の軸 x'は、他の総ての軸に対して傾いている。

この事情を上の図に示した。c=1 としたので、光は 45 度の線にのっている。 O 系では波線のように距離と時間を測るのが正しいが、 O'系では、軸が傾いているので点線のように測らなければならない。いずれでも、距離と時間の比は 1 であることが見て取れよう。βが1に近ずくと t', x'軸はともに $x=t$ の線に近ずく。

ある慣性系から見て、速度βで動く物体を考えよう。この時 O'系で長さ 1 の線分を O 系で観測することは、O'系での x'の決まった 2 点、例えば x' = 0, 1（t'任意、すなわち O'系でどんな時刻に於いても座標が変わらない）で表される時空上の 2 つの線を、O 系である時刻（例えば t=0）で観測することを意味する。ここで、 O'系で $\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\beta \\ 1 \end{pmatrix}$ の点がそれぞれ O 系で $\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ (1-\beta^2)\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\gamma \end{pmatrix}$ に変換することを使おう。これから、ある慣性系から速度βで動く長さ l の物体を観測すると l/γ の長さになる（ローレンツ収縮） ことが導ける。

また、質点の時空上の位置を表すベクトルの変換から、物体の静止系（　　O'系）で

$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \beta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\beta^2)\gamma t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t/\gamma \\ 0 \end{pmatrix}$と表される。従って、速く動く物体の固有時間は $1/\gamma$ 倍になる（持っている時計は遅くなる（双子のパラドックス））事が結論される。これが実際に精度良く成り立つことは、加速器を使った粒子の寿命の測定から明らかになっている。一般に不安定な粒子は、それを「観測者に対して静止」させておくと、ある一定の割合で崩壊(壊れ)る。この粒子を、非常に高速に動く状態で磁場中に閉じこめておくと、「静止」させて置いたときに比べて何倍も長生きさせることが容易に出来る。

これらの現象は、物事を光で観測するからそのように見えるのではないということに注意して欲しい。あくまで（どのような座標変換によっても変わらない不変速度があるという仮定のもとに導かれた）時間と空間との変換の関係（規則）から得られる結論である。

「Lorentz 変換は理解しがたい」と思うかもしれないが、もう一度「理解」とは何であるか、考えてみて欲しい。我々の日常感覚で、地球が丸く、非常に高速で自転しつつ、さらに太陽の周りを公転しているなどと言うことが、理解できるだろうか？コペルニクスが地動説を唱えたときに、何故、簡単には受け入れられなかったかというと、それが、日常感覚とは、全く合い入れないせいである。地球の宇宙写真も、衛星中継も知らない人に、地球が丸く、音速など比べものにならないほど速い速度で太陽の周りを回っているなどと言うことを説明するのが、いかに大変か想像してみて欲しい。どうして、我々は、そんな突拍子もないことを、事実として受け入れているのだろう？それは、地球の宇宙写真を見たからであり、日食や月食の起こる理由が説明できるからであり、月食の陰(地球の陰)が丸いからであり、、、要するに、そう考えなければ理解できない実験(観測)事実が多数存在するからである。実際の所、地動説を受け入れていると言うことは、日常感覚と事実は全く異なることがありうるという意識の革命を、我々はすでに受け入れているわけである。Lorentz 変換も全く同じ事だ。

Lorentz 変換自身は、「もし光が、それをどのように観測しようと、それを発するものの速さと無関係に、一定であるとするのなら、我々が住む宇宙の空間と時間の関係が、どのようになっていなければならないか」を数式的にまとめたものにすぎない。逆に、もしこれが正しいのなら、きっと、地動説を認めたときと同じように、今まで説明できなかったことが、いろいろ説明できるようになるに違いない。磁場が極めて自然な形で電場から説明できるようになるのは、その典型的な例である。ここでは、そのようにして磁場というものを理解していこうというわけである。

また、これまで“絶対速度”で移動する物質として、光を考えたが、これは後で見るように“静止質量”が 0 の物質なら、どんな物でもこの“絶対速度”で動いていなければならないことが分かる。すなわち、たまたま我々が最初に発見した“静止質量”が 0 の物質が光であったと言うだけの話である。他に、この様な物質かもしれないと考えられる物にニュートリノがある。ただし、これが本当に“静止質量”が 0 の物質かどうかは、現在でも物理学の重大な疑問の一つである。