磁場の諸性質

電場と同様、磁場についてもどのような性質があるかを調べていこう。時間変化を考えない場合の真空中での電場の性質を思い出してみると、それは

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}) \quad \text{及び} \quad \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

で表された。それぞれ、電場は電荷から湧き出し、渦が出来ることはないということを表している。磁場についても同様な性質を調べていこう。

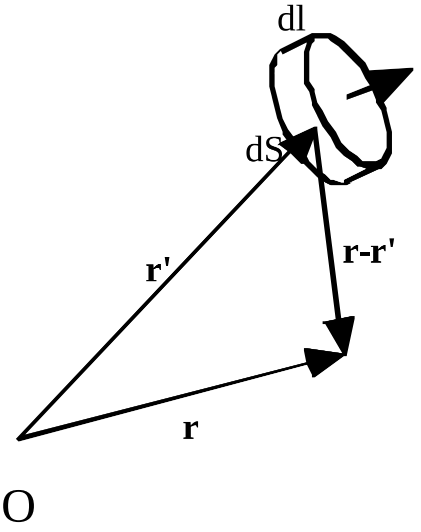
○ベクトルポテンシャル

その前に、Biot-Savart の式をもう少し変形しておく。座標原点において、微少長さ$d\ell$の区間の微少面dSを通る電流$\mathbf{i}$が位置$\mathbf{r}$に作り出す微少磁場は

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{i}\times\mathbf{r}}{r^3}d\ell dS = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{i}\times\mathbf{r}}{r^3}dv$$

で表された。ここで、より一般的に電流が流れている位置を$\mathbf{r}'$として、それが空間上の位置$\mathbf{r}$に作り出す微少磁場を与える形に直すと

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{R^3}dv' \quad \text{ただし} \ R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$$



と書ける。従って、ある体積V の中の電流によって作られる磁場は、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{R^3}dv' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathbf{i}(\mathbf{r}')\times\nabla\left(\frac{1}{R}\right)dv'$$

で表される。ここで、$\mathbf{c}$を$\mathbf{r}$に依存しない任意のベクトル、bを任意のスカラー($\mathbf{r}$の関数)とすると、$\mathbf{c}\times\nabla b(\mathbf{r}) = \nabla\times b(\mathbf{r})\mathbf{c}$が成り立つので、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\times\left(\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{R}\right)dv' = \nabla\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left(\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{R}\right)dv'\right]$$

と書ける。当然V は、電流が流れている全空間で積分しなければならない。この式の括弧の中をベクトルポテンシャル$\mathbf{A}(\mathbf{r})$といい、これを使うと磁場は簡単な形に表すことができる。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}) \qquad \text{ただし} \ \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left(\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{R}\right)dv'$$

○磁場の湧き出しと回転

$\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r})$は、ベクトル演算の公式 $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{a}(\mathbf{r})) = \mathbf{0}$ を使うとたちどころに計算できる。ただし、、$\mathbf{a}(\mathbf{r})$は任意の$\mathbf{r}$のベクトル関数である。

$$\underline{\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})) = 0}$$

となり、電流によって作られる磁場には湧き出しは存在しない。

回転(渦が発生しているかどうか)の計算は、少しやっかいなので、多少準備しよう。

まず $\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{R^3} = -\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)$ はいいだろうか？ここで、∇' は $\mathbf{r}'$ についての微分であるということに注意すれば、ほとんど自明だろう。実際に回転を計算する前にもう一つ、次の積分 $\int_V \nabla'\cdot\left(\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{R}\right)dv'$ の変形をしておく。電荷の保存の関係 $\frac{d}{dt}\rho(\mathbf{r}) = -\nabla\cdot\mathbf{i}(\mathbf{r})$ に注意すると、

$$\begin{aligned}\int_V \nabla'\cdot\left(\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{R}\right)dv' &= \int_V \frac{1}{R}\nabla'\cdot\mathbf{i}(\mathbf{r}')dv' + \int_V \mathbf{i}(\mathbf{r}')\cdot\nabla'\frac{1}{R}dv' = -\int_V \frac{1}{R}\frac{d}{dt}\rho(\mathbf{r}')dv' - \int_V \mathbf{i}(\mathbf{r}')\cdot\nabla\frac{1}{R}dv' \\ &= -\frac{d}{dt}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R}dv' - \int_V \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{R}\right)dv' = -\frac{d}{dt}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R}dv' - \nabla\cdot\int_V \left(\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{R}\right)dv'\end{aligned}$$

となる。一方、この同じ積分は、ガウスの定理から、$\int_V \nabla'\cdot\left(\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{R}\right)dv' = \oint_S \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{R}\cdot d\mathbf{s}$ である。一方、積分領域を電流が流れている空間全部を含むような大きな領域を考えていることに注意すれば、電流はその領域表面 S で常に **0** なので、この積分は必ず 0 になる。従って、

$$\frac{d}{dt}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R}dv' = -\nabla\cdot\int_V \left(\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{R}\right)dv'$$

となる。

また回転の計算には、ベクトル演算の公式 $\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{a}(\mathbf{r})\right) = \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{a}(\mathbf{r})\right) - \nabla^2\mathbf{a}(\mathbf{r})$ が必要になるが、これはいいだろうか？不安なら、単純に展開すればいいだけなので、実際に計算してみてほしい。また、電場の電荷からの計算式 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R}dv'$ も必要になる。

さて、準備がすんだので、実際に回転を計算してみよう。

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{R}dv' = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\left(\nabla\cdot\int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{R}dv'\right) - \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla^2\int_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{R}dv' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\frac{d}{dt}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R}dv' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathbf{i}(\mathbf{r}')\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)dv' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d}{dt}\nabla\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R}dv' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathbf{i}(\mathbf{r}')\left(-4\pi\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)\right)dv' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d}{dt}\left(-4\pi\varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r})\right) + \mu_0\int_V \mathbf{i}(\mathbf{r}')\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)dv' = \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mu_0\mathbf{i}(\mathbf{r})\end{aligned}$$

となる。電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ が時間及び空間の位置の関数と思うと、その時間微分は、偏微分で書くのが正しいので、まとめると

$$\underline{\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0\mathbf{i}(\mathbf{r}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r})}$$

とかける。この式から、磁場は電流の周りに渦となって発生するだけでなく、電場の時間変化によっても同様に渦となって発生することが分かる。

ここまでで分かった真空中での電磁場の性質をまとめると、

$$\boxed{\begin{aligned}&\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}), && \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \\ &\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, && \nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0\mathbf{i}(\mathbf{r}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r})\end{aligned}}$$

のように書くことが出来る。

○磁場の時間変化と電場

　前の節で、電場の時間変化によって磁場が発生することが分かったが、逆に磁場の時間変化によって電場が形成されることはないのだろうか？磁場の時間変化をいきなり考えても答えはでない。しかし、我々は相対性原理を使って、静止系(O 系)で時間変化はしないが、空間的に一様ではない磁場中$\mathbf{B}(x,y,z)$を別の慣性系(O'系)から眺めてみることは出来る。O'系から見れば、当然、磁場は時間によって変化するように見えることはいいだろう。また、その際 O'系から見えるはずの電磁場の計算規則は、既に知っている。簡単のため、O'系を速度β_zで z 軸方向に動くとすると、

$$\mathbf{E}'_{//}=\gamma\beta\times\mathrm{B}=\begin{pmatrix}-\gamma\beta_z B_y\\ \gamma\beta_z B_x\\ 0\end{pmatrix}\quad\text{および}\quad \mathbf{E}'=\mathbf{0}\quad\text{から}$$

$$\mathbf{E}'(t',x',y',z')=\begin{pmatrix}-\gamma\beta_z B_y(x,y,z)\\ \gamma\beta_z B_x(x,y,z)\\ 0\end{pmatrix}\quad\text{また}\quad \mathbf{B}'(t',x',y',z')=\begin{pmatrix}\gamma B_x(x,y,z)\\ \gamma B_y(x,y,z)\\ B_z(x,y,z)\end{pmatrix}$$

この式の O'系での回転をとると、

$$\nabla'\times\mathbf{E}'(t',x',y',z')=\begin{pmatrix}-\gamma\beta_z\dfrac{\partial}{\partial z'}B_x(x,y,z)\\ -\gamma\beta_z\dfrac{\partial}{\partial z'}B_y(x,y,z)\\ \gamma\beta_z\left(\dfrac{\partial}{\partial x'}B_x(x,y,z)+\dfrac{\partial}{\partial y'}B_y(x,y,z)\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\beta_z\dfrac{\partial}{\partial z'}B_x'(t',x',y',z')\\ -\beta_z\dfrac{\partial}{\partial z'}B_y'(t',x',y',z')\\ \beta_z\left(\dfrac{\partial}{\partial x'}B_x'(t',x',y',z')+\dfrac{\partial}{\partial y'}B_y'(t',x',y',z')\right)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\beta_z\dfrac{\partial}{\partial z'}B_x'(t',x',y',z')\\ -\beta_z\dfrac{\partial}{\partial z'}B_y'(t',x',y',z')\\ \beta_z\nabla'\cdot\mathbf{B}'-\beta_z\dfrac{\partial}{\partial z'}B_z'(t',x',y',z')\end{pmatrix}=-\frac{\partial z'}{\partial t'}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial z'}B_x'(t',x',y',z')\\ \dfrac{\partial}{\partial z'}B_y'(t',x',y',z')\\ \dfrac{\partial}{\partial z'}B_z'(t',x',y',z')\end{pmatrix}=-\frac{\partial}{\partial t'}\mathbf{B}'(t',x',y',z')$$

ここで、O'系での磁場の時間変化は座標変換のみからくることを使った。
以上をまとめると、真空中における全ての Maxwell 方程式が揃ったことになる。

$$\boxed{\begin{aligned}&\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}), &&\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r})=-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\\ &\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r})=0, &&\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r})=\mu_0\mathbf{i}(\mathbf{r})+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r})\end{aligned}}$$